

ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL DUA MANGSA- SATU PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING DAN PEMANENAN

Armin¹⁾, Syamsuddin Toaha²⁾, Kasbawati³⁾

¹⁾²⁾³⁾Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Hasanuddin
Jln. Perintis Kemerdekaan, KM 10, Makassar

¹⁾arminhoery@gmail.com

²⁾syamsuddint@yahoo.com

³⁾kasbawati@gmail.com

Abstrak— Pada artikel ini dikaji suatu dinamika populasi dua mangsa dan satu pemangsa dengan usaha pemanenan konstan dan persaingan antar mangsa. Dinamika itu dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan differensial autonomus. Fungsi predasi yang diberikan dalam sistem diasumsikan sama untuk kedua mangsa, yaitu fungsi respon Holling tipe I. Pada model tersebut diberikan syarat kewujudan titik keseimbangan non negatif serta kestabilannya dan pengaruh pemanenan pada kestabilan titik keseimbangan yang stabil. Analisis kestabilan dilakukan dengan menggunakan metode linearisasi, nilai eigen, dan uji kestabilan Routh-Hurwitz. Dari analisis diperoleh suatu kondisi di mana wujud suatu titik keseimbangan yang berada pada oktan pertama dan stabil secara asimtot. Hal ini menunjukkan bahwa dengan suatu nilai parameter tertentu dan nilai usaha pemanenan tertentu diperoleh suatu titik keseimbangan yang stabil. Hal ini berarti bahwa ketiga populasi tersebut dapat hidup bersama dan lestari untuk jangka waktu yang panjang meskipun ketiga populasi dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan. Plot trayektori untuk ketiga populasi diberikan untuk melihat dinamika populasi terhadap waktu.

Kata Kunci— Model mangsa-pemangsa, Fungsi respon Holling, Pemanenan, Kestabilan.

I. PENDAHULUAN

Proses kelangsungan hidup suatu populasi di alam tidak terlepas dari dinamika, hal ini disebabkan karena adanya interaksi yang terjadi antar populasi. Salah satu interaksi yang terjadi sering terjadi adalah interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa yang dikenal dengan dinamika model populasi *predator-prey*. Dalam model *predator-prey* juga terdapat interaksi intraspesifik atau interaksi yang terjadi antar individu dalam populasi mangsa atau interaksi yang terjadi antar populasi pemangsa, dan interaksi interspesifik yaitu interaksi yang terjadi dalam populasi mangsa ataupun pada pemangsa. Dampak yang terjadi dari interaksi tersebut dapat memberikan keuntungan atau kerugian terhadap suatu populasi. Untuk menjaga kelestarian suatu populasi, diperlukan adanya campur tangan

manusia, dalam hal ini dinamika suatu populasi dikontrol sehingga diperoleh populasi seimbang yang stabil untuk jangka waktu yang lama. Disamping kelestarian yang terjaga, diharapkan populasi yang dieksploitasi juga dapat memberikan keuntungan secara ekonomis kepada manusia. Untuk memperoleh keuntungan dari populasi, dilakukan suatu usaha pemanenan pada populasi dengan berbagai metode. Dalam melakukan pemanenan kepada populasi, dinamika populasi dinyatakan dalam bentuk model matematika sehingga kelestarian populasi mangsa, dan pemangsa yang dikaji dapat diamati melalui pendekatan matematika.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian yang terkait dengan dinamika populasi mangsa dan pemangsa dilakukan oleh beberapa penulis sebelumnya. Agrawal dan Pathak (2012) melakukan penelitian dinamika populasi mengenai pengaruh pemanenan dan pajak dalam menganalisis kebijakan pemanenan optimal. Daga, dkk. (2014a) melakukan penelitian mengenai model dua mangsa satu pemangsa dan mengkaji kestabilan lokal dan global serta persistensi sistem. Daga, dkk. (2014b) melakukan penelitian tentang model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling III serta menganalisis kestabilan titik keseimbangan secara lokal. Gakkhar dan Naji (2002) mengkaji dinamika dua populasi mangsa dan satu populasi pemangsa dan menganalisis kemungkinan terjadinya kondisi kacau (*chaos*) dari sistem. Hntsa dan Magesha (2016) mengkaji model dinamika satu mangsa dengan dua pemangsa yang berkompetisi dan menganalisis kestabilan titik keseimbangan. Kar dan Chauduri (2002) melakukan penelitian mengenai kestabilan dua mangsa satu pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe I dan pemanenan pada mangsa. Kar dan Batabyal (2010) mengkaji dinamika populasi dua mangsa dan satu pemangsa dan menganalisis kestabilan global. Rao dan Rasappan (2015) melakukan penelitian mengenai dinamika populasi mangsa yang rentan kena penyakit, mangsa yang terinfeksi dengan

populasi pemangsa yang mengkaji kestabilan lokal dan global dari sistem. Srilatha dan Ravindra (2014) melakukan penelitian mengenai analisis kestabilan model tiga populasi yang bersifat mutualisme dan mengkaji pengaruh pemanenan dan kebijakan pemanenan optimal. Toaha, dkk. (2014) mengkaji dinamika populasi mangsa dan pemangsa dengan pemanenan dan dianalisis kemungkinan diperoleh keuntungan maksimal. Yeni, dkk. (2016) melakukan penelitian mengenai kestabilan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II dan pemanenan. Penelitian sebelumnya yang menjadi acuan dalam penelitian tersebut adalah model dua mangsa-satu pemangsa dengan fungsi respon Holling I dan pemanenan pada mangsa yang pernah dikaji oleh Kar dan Chaudri (2002) dengan persamaan

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 \left(\lambda_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 \right) - q_1Ex_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \left(\lambda_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2} \right) - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{23}x_3 \right) - q_2Ex_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3 (\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 - x_3).\end{aligned}$$

Simbol x_1, x_2, x_3 berturut-turut menyatakan ukuran populasi mangsa pertama pada waktu t , ukuran populasi mangsa kedua pada waktu t dan ukuran populasi pemangsa pada waktu t . Dalam model tersebut fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe I dan pemanenan yang diberikan pada populasi mangsa pertama dan mangsa kedua.

III. METODE PENELITIAN

A. Tahap Studi Literatur

Untuk mengidentifikasi masalah, maka dilakukan studi literatur tentang model dinamika populasi, titik keseimbangan model, kestabilan titik keseimbangan secara lokal dan pemanenan optimal.

B. Tahap Analisis Model

Analisis model dilakukan dengan menentukan syarat kewujudan titik keseimbangan model yang bernilai non negatif dan kestabilannya dengan metode linearisasi dan metode nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh dari model ataupun dengan metode uji kestabilan Routh-Hurwitz. Titik keseimbangan interior yang stabil dihubungkan dengan persoalan pemanenan optimal. Dari fungsi keuntungan yang terbentuk ditentukan titik kritis dari usaha pemanenan yang memberikan keuntungan maksimum. Nilai-nilai usaha pemanenan selanjutnya digunakan untuk menentukan titik keseimbangan untuk model dengan pemanenan. Selanjutnya dianalisis kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan interior untuk model dengan pemanenan.

C. Tahap Simulasi Model

Simulasi terhadap model dilakukan untuk melihat titik keseimbangan, kestabilan, dan kurva solusi dari model.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model

Beberapa asumsi yang digunakan dalam model dua mangsa-satu pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe I dan usaha pemanenan konstan adalah:

1. Laju pertumbuhan mangsa mengikuti laju pertumbuhan logistik.
2. Fungsi respon yang digunakan pada model diasumsikan menggunakan fungsi respon Holling tipe I.
3. Terdapat interaksi interspesifik antar mangsa pertama dan mangsa kedua.
4. Usaha pemanenan diasumsikan sama untuk mangsa pertama dan mangsa kedua.
5. Pemanenan dilakukan pada ketiga populasi

6. TABEL 1. DEFINISI PARAMETER

Parameter	Definisi
x	Ukuran populasi mangsa pertama
y	Ukuran populasi mangsa kedua
z	Ukuran populasi pemangsa
K	Daya dukung lingkungan mangsa pertama
L	Daya dukung lingkungan mangsa kedua
a_1	Koefisien interaksi kompetisi interspesifik mangsa pertama dan kedua
a_2	Koefisien interaksi kompetisi interspesifik mangsa pertama dan kedua
ω_1	Efisiensi pencarian mangsa pertama
ω_2	Efisiensi pencarian mangsa kedua
b_1	Tingkat efisiensi pemangsaan akibat memangsa mangsa pertama
b_2	Tingkat efisiensi pemangsaan akibat memangsa mangsa kedua
q_1	Laju ketertangkapan mangsa pertama
q_2	Laju ketertangkapan mangsa kedua
q_3	Laju ketertangkapan pemangsa
E_1	Usaha pemanenan pada mangsa pertama dan mangsa kedua
E_3	Usaha pemanenan pada pemangsa
c	Laju kematian pemangsa
r	Laju pertumbuhan intrinsik mangsa pertama
s	Laju pertumbuhan intrinsik mangsa kedua

Model dua mangsa-satu pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe I tanpa pemanenan diberikan pada sistem berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - a_1xy - \omega_1xz \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) - a_2xy - \omega_2yz \quad (1) \\ \frac{dz}{dt} &= b_1\omega_1xz - b_2\omega_2yz - cz.\end{aligned}$$

Model dua mangsa-satu pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe I dan pemanenan diberikan pada sistem berikut

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - a_1xy - \omega_1xz - q_1E_1x$$

$$\frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) - a_2xy - \omega_2yz - q_2E_1y(2)$$

$$\frac{dz}{dt} = b_1\omega_1xz + b_2\omega_2yz - cz - q_3E_3z.$$

Definisi parameter pada Eq.1 dan Eq.2 diberikan pada pada Tabel 1.

B. Analisis Titik Keseimbangan

Untuk penyederhanaan, pada Eq. 2 dimisalkan $\beta = b_1\omega_1$, $\mu = b_2\omega_2$, $\delta_1 = q_1E_1$, $\delta_2 = q_2E_1$, dan $\delta_3 = q_3E_3$.

1. Analisis Titik Keseimbangan Model Tanpa Pemanenan

Pada Eq.1, terdapat tujuh titik keseimbangan yang mungkin, yaitu: $P_0(0,0,0)$, $P_1(K,0,0)$

$P_2(0,L,0)$, $P_3(x_3^*, y_3^*, z_3^*)$, $P_4(0, y_4^*, z_4^*)$,

$P_5\left(\frac{c}{\beta}, 0, \frac{r(K\beta-c)}{K\beta\omega_1}\right)$, dan $P_6(x_6^*, y_6^*, z_6^*)$,

dengan $x_3^* = \frac{Ks(r-a_1L)}{rs-KLa_1a_2}$, $y_3^* = \frac{Lr(s-Ka_2)}{rs-KLa_1a_2}$, $y_4^* =$

$\frac{c}{\mu}$, $z_4^* = \frac{s(L\mu-c)}{\mu\omega_2L}$, $x_5^* = \frac{c}{\beta}$, $z_5^* = \frac{r(K\beta-c)}{K\beta\omega_1}$,

$x_6^* = \frac{KL(a_1c\omega_2 + \omega_1s\mu) - K(\mu\omega_2rL + \omega_1sc)}{KL(\beta a_1\omega_2 + \mu a_2\omega_1) - s\beta\omega_1K - \mu\omega_2rL}$

$y_6^* = \frac{LK(\beta r\omega_2 + ca_2\omega_1) - L(rc\omega_2 + \beta\omega_1Ks)}{KL(\beta a_1\omega_2 + \mu a_2\omega_1) - s\beta\omega_1K - \mu\omega_2rL}$

$z_6^* = \frac{KL(s\beta a_1 + a_2r\mu) + src}{KL(\beta a_1\omega_2 + \mu a_2\omega_1) - s\beta\omega_1K - \mu\omega_2rL} - \frac{sr(\beta K + L\mu) + KLa_2a_1c}{KL(\beta a_1\omega_2 + \mu a_2\omega_1) - s\beta\omega_1K - \mu\omega_2rL}$.

Titik keseimbangan $P_0(0,0,0)$, $P_1(K,0,0)$, dan $P_2(0,L,0)$ tidak relevan dengan kondisi biologi sehingga tidak dianalisis. Titik P_3 wujud jika $r > a_1L$ dan $s > a_2K$. Titik P_4 wujud jika $L\mu > c$. Titik P_5 wujud jika $K\beta > c$. Titik P_6 wujud jika $L(a_1c + \mu) < \mu rL + c$, $K(\beta + ca_2) < c + \beta Ks$, dan $La_1 + Ka_2 + sr < s + r + La_2Ka_1$.

2. Analisis titik keseimbangan model dengan pemanenan

Pada Eq.2, terdapat tujuh titik keseimbangan yang mungkin, yaitu:

$H_0(0,0,0)$, $H_1(K,0,0)$, $H_2(0,L,0)$,

$H_3(x_{31}^*, y_{31}^*, 0)$, $H_4(0, y_{41}^*, z_{41}^*)$,

$H_5(x_{51}^*, 0, z_{51}^*)$, dan $H_6(x_{6+}^*, y_{6+}^*, z_{6+}^*)$, dengan

$x_{31}^* = \frac{K(sr+La_1\delta_2-a_1Ls-s\delta_1)}{rs-KLa_2a_1}$, $y_{31}^* = \frac{L(rs+Ka_2\delta_1-Kra_2-s\delta_2)}{rs-KLa_1a_2}$

, $y_{41}^* = \frac{c+\delta_3}{\mu}$, $z_{41}^* = \frac{Ls\mu-sc-s\delta_3-L\delta_2\mu}{\mu\omega_2L}$,

$x_{51}^* = \frac{c+\delta_3}{\beta}$, $z_{51}^* = \frac{rK\beta-rs-r\delta_3-K\delta_1\beta}{K\beta\omega_1}$

$x_{61}^* = \frac{LK(\mu\omega_2\delta_1+ca_1\omega_2+a_1\omega_2\delta_3+s\mu\omega_1)}{KL a_1\beta\omega_2+KL a_2\omega_1\mu-Ks\beta\omega_1-Lr\mu\omega_2} - \frac{LK\mu(\omega_1\delta_2+r\omega_2)+Ks\omega_1(c+\delta_3)}{KL a_1\beta\omega_2+KL a_2\omega_1\mu-Ks\beta\omega_1-Lr\mu\omega_2}$,

$y_{61}^* = \frac{LK(r\beta\omega_2+a_2\omega_1\delta_3+ca_2\omega_1+\beta\omega_1\delta_2)}{KL a_1\beta\omega_2+KL a_2\omega_1\mu-Ks\beta\omega_1-Lr\mu\omega_2} - \frac{LK\beta(\omega_2\delta_1+s\omega_1)+Lr\omega_2(c+\delta_3)}{KL a_1\beta\omega_2+KL a_2\omega_1\mu-Ks\beta\omega_1-Lr\mu\omega_2}$, dan

$$z_{61}^* = \frac{KLsa_1\beta + Ks\beta\delta_1 + src + sr\delta_3 + LKra_2\mu + Lr\mu\delta_2}{KL a_1\beta\omega_2 + KL a_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2} - \frac{Lsr\mu + KLca_2a_1 + KL a_2a_1\delta_3 + Ksr\beta + KL a_2\mu\delta_1 + KL a_1\beta\delta_2}{KL a_1\beta\omega_2 + KL a_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2}.$$

Titik keseimbangan $H_0(0,0,0)$, $H_1(K,0,0)$, dan $H_2(0,L,0)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak relevan dengan kondisi biologi sehingga tidak dianalisis.

Titik H_3 wujud jika $r + La_1\delta_2 > a_1L + s\delta_1$, $s + Ka_2\delta_1 > Ka_2 + s\delta_2$. Titik H_4 wujud jika $Ls\mu > sc + s\delta_3 + L\delta_2\mu$.

Titik H_5 wujud jika $rK\beta > rc + r\delta_3 + K\delta_1\beta$. Titik H_6 wujud jika memenuhi $L\mu\omega_2\delta_1 + Lca_1\omega_2 + La_1\omega_2\delta_3 + Ls\mu\omega_1 < sc\omega_1 + s\omega_1\delta_3 + L\mu\omega_1\delta_2 +$

$Lr\mu\omega_2, K\beta\omega_2 + Ka_2\omega_1\delta_3 + Kca_2\omega_1 + K\beta\omega_1\delta_2 < cr\omega_2 + r\omega_2\delta_3 + K\beta\omega_2\delta_1 + Ks\beta\omega_1$, dan $KLsa_1\beta + Ks\beta\delta_1 + src + sr\delta_3 + LKra_2\mu + Lr\mu\delta_2 < Lsr\mu + KLca_2a_1 + KL a_2a_1\delta_3 + Ksr\beta + KL a_2\mu\delta_1 + KL a_1\beta\delta_2$.

C. Analisis Kestabilan

Untuk penyederhanaan, pada Eq. 2 dimisalkan $\beta = b_1\omega_1$, $\mu = b_2\omega_2$, $\delta_1 = q_1E_1$, $\delta_2 = q_2E_1$, dan $\delta_3 = q_3E_3$.

1. Analisis kestabilan model tanpa pemanenan

Dari model Eq.1 diperoleh matriks Jacobian

$$J(P) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $J_{11} = r - 2\frac{r}{K}x - a_1y - \omega_1z$, $J_{12} = -a_1x$, $J_{13} = -\omega_1x$, $J_{21} = -a_2y$, $J_{22} = s - 2\frac{s}{L}y - a_2x - \omega_2z$, $J_{23} = -\omega_2y$, $J_{31} = \beta z$, $J_{32} = \mu z$, dan $J_{33} = \beta x + \mu y - c$.

Teorema 1. Titik keseimbangan $P_3(x_3^*, y_3^*, 0)$ stabil asimtotik lokal jika memenuhi kondisi

$\beta x_3^* + \mu y_3^* < c$, $(2\frac{r}{K} + a_2)x_3^* + (a_1 + 2\frac{s}{L})y_3^* > r + s$, dan $rs + 4\frac{rs}{KL}x_3^*y_3^* + 2\frac{r}{K}a_2x_3^{*2} + 2\frac{s}{L}a_1y_3^{*2} > y_3^*(2\frac{rs}{L} + sa_1) + x_3^*(ra_2 + 2\frac{rs}{K})$.

Bukti: Matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik keseimbangan $P_3(x_3^*, y_3^*, 0)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J(P_3) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $M_{11} = r - 2\frac{r}{K}x_3^* - a_1y_3^*$, $M_{12} = -a_1x_3^*$, $M_{13} = -\omega_1x_3^*$, $M_{21} = -a_2y_3^*$, $M_{22} = s - 2\frac{s}{L}y_3^* - a_2x_3^*$, $M_{23} = -\omega_2y_3^*$, dan

$M_{33} = \beta x_3^* + \mu y_3^* - c$.

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik

$f(\lambda) = \det [J(P_3) - \lambda I] = 0$, yaitu $(M_{33} - \lambda)[\lambda^2 - (M_{11} + M_{22})\lambda + M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}] = 0$, atau $(M_{33} - \lambda)[\lambda^2 + \rho_1\lambda + \rho_2] = 0$, dengan

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -(M_{11} + M_{22}) \\ &= 2\frac{r}{K}x_3^* + a_1y_3^* + 2\frac{s}{L}y_3^* \\ &\quad + a_2x_3^* - r - s \\ \rho_2 &= M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = rs + 4\frac{rs}{KL}x_3^*y_3^* + \\ &\quad 2\frac{r}{K}a_2x_3^{*2} + 2\frac{s}{L}a_1y_3^{*2} - 2\frac{rs}{L}y_3^* - \\ &\quad ra_2x_3^* - 2\frac{rs}{K}x_3^* - sa_1y_3^*.\end{aligned}$$

Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz, titik keseimbangan $P_3(x_3^*, y_3^*, 0)$ stabil asimptotik lokal jika $M_{33} < 0$, $\rho_1 > 0$, dan $\rho_2 > 0$. Syarat tersebut memenuhi Teorema 1.

Teorema 2. Titik keseimbangan $P_4(0, y_4^*, z_4^*)$ stabil asimptotik lokal jika memenuhi kondisi $r < a_1y_4^* + \omega_1z_4^*$, $2\frac{s}{L}y_4^* + \omega_2z_4^* + c > s + \mu y_4^*$, dan $y_4^*(s\mu + 2\frac{cs}{L}) + c\omega_2z_4^* > cs + 2\frac{s\mu}{L}y_4^{*2}$.

Bukti: Matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan $P_4(0, y_4^*, z_4^*)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J(P_4) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $M_{11} = r - a_1y_4^* - \omega_1z_4^*$, $M_{21} = -a_2y_4^*$, $M_{22} = s - 2\frac{s}{L}y_4^* - \omega_2z_4^*$, $M_{23} = -\omega_2y_4^*$, $M_{31} = \beta z_4^*$, $M_{32} = \mu z_4^*$, dan $M_{33} = \mu y_4^* - c$. Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik $f(\lambda) = \det[J(P_4) - \lambda I] = 0$, yaitu $(M_{11} - \lambda)[\lambda^2 - (M_{22} + M_{33})\lambda + M_{22}M_{33} - M_{23}M_{32}] = 0$, atau $(M_{11} - \lambda)[\lambda^2 + \rho_1\lambda + \rho_2] = 0$, dengan $\rho_1 = -(M_{22} + M_{33}) = 2\frac{s}{L}y_4^* + \omega_2z_4^* + c - s - \mu y_4^*$,

$$\rho_2 = s\mu y_4^* + 2\frac{cs}{L}y_4^* + c\omega_2z_4^* - cs - 2\frac{s\mu}{L}y_4^{*2}.$$

Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz, titik keseimbangan $P_4(0, y_4^*, z_4^*)$ stabil asimptotik lokal jika $M_{11} < 0$, $\rho_1 > 0$, dan $\rho_2 > 0$. Syarat tersebut memenuhi Teorema 2.

Teorema 3. Titik keseimbangan $P_5(x_5^*, 0, z_5^*)$ stabil asimptotik lokal jika memenuhi kondisi $s < a_2x_5^* + \omega_2z_5^*$, $x_5^*(r\beta + 2\frac{cr}{K}) + c\omega_1z_5^* > cr + 2\frac{r\beta}{K}x_5^{*2}$, dan $2\frac{r}{K}x_5^* + \omega_1z_5^* + c > r + \beta x_5^*$.

Bukti: Matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan $P_5(x_5^*, 0, z_5^*)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J(P_5) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ 0 & M_{22} & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $M_{11} = r - 2\frac{r}{K}x_5^* - \omega_1z_5^*$, $M_{12} = -a_1x_5^*$, $M_{13} = -\omega_1x_5^*$, $M_{22} = s - a_2x_5^* - \omega_2z_5^*$, $M_{31} = \beta z_5^*$, $M_{32} = \mu z_5^*$, dan $M_{33} = \beta x_5^* - c$. Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik $f(\lambda) = \det[J(P_5) - \lambda I] = 0$, yaitu

$$\begin{aligned}(M_{22} - \lambda)[\lambda^2 - (M_{11} + M_{33})\lambda + M_{11}M_{33} - \\ M_{12}M_{31}] &= 0, \text{ atau} \\ (M_{22} - \lambda)[\lambda^2 + \rho_1\lambda + \rho_2] &= 0, \text{ dengan} \\ \rho_1 &= -(M_{11} + M_{33}) = 2\frac{r}{K}x_5^* + \omega_1z_5^* + c - r - \\ &\quad \beta x_5^* \text{ dan} \\ \rho_2 &= M_{11}M_{33} - M_{12}M_{31} = r\beta x_5^* + 2\frac{cr}{K}x_5^* + \\ &\quad c\omega_1z_5^* - cr - 2\frac{r\beta}{K}x_5^{*2}.\end{aligned}$$

Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz, titik keseimbangan $P_5(x_5^*, 0, z_5^*)$ stabil asimptotik lokal jika $M_{22} < 0$, $\rho_1 > 0$, dan $\rho_2 > 0$. Syarat tersebut memenuhi Teorema 3.

Teorema 4. Titik keseimbangan $P_6(x_6^*, y_6^*, z_6^*)$ stabil asimptotik lokal jika memenuhi kondisi $\rho_1 < 0$, $\rho_2 < 0$, $\rho_3 < 0$, dan $\rho_1\rho_2 - \rho_3 < 0$, di mana $\rho_1 = -(M_{11} + M_{22} + M_{33})$, $\rho_2 = (M_{11}M_{22} + M_{22}M_{33} + M_{11}M_{33} - M_{12}M_{21} - M_{32}M_{23} - M_{31}M_{13})$, dan $\rho_3 = M_{13}M_{22}M_{31} + M_{11}M_{23}M_{32} + M_{12}M_{21}M_{33} - M_{12}M_{22}M_{33} - M_{12}M_{23}M_{31} - M_{13}M_{21}M_{32}$.

Bukti: Matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan $P_6(x_6^*, y_6^*, z_6^*)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J(P_6) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $M_{11} = r - 2\frac{r}{K}x_6^* - a_1y_6^* - \omega_1z_6^*$, $M_{12} = -a_1x_6^*$, $M_{13} = -\omega_1x_6^*$, $M_{21} = -a_2y_6^*$, $M_{22} = s - 2\frac{s}{L}y_6^* - a_2x_6^* - \omega_2z_6^*$, $M_{23} = -\omega_2y_6^*$, $M_{31} = \beta z_6^*$, $M_{32} = \mu z_6^*$, dan $M_{33} = \beta x_6^* + \mu y_6^* - c$.

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik

$$\begin{aligned}f(\lambda) &= \det[J(P_6) - \lambda I] = 0 \text{ yaitu} \\ \lambda^3 - (M_{11} + M_{22} + M_{33})\lambda^2 + (M_{11}M_{22} + \\ &\quad M_{22}M_{33} + M_{11}M_{33} - M_{12}M_{21} - M_{32}M_{23} \\ &\quad - M_{31}M_{13} - \lambda + M_{13}M_{22}M_{31} + M_{11}M_{23}M_{32} \\ &\quad + M_{12}M_{21}M_{33} - M_{12}M_{22}M_{33} - M_{12}M_{23} \\ &\quad M_{31} - M_{13}M_{21}M_{32}) &= 0, \text{ atau} \\ \lambda^3 + \rho_1\lambda^2 + \rho_2\lambda + \rho_3 &= 0, \text{ dengan}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -(M_{11} + M_{22} + M_{33}), \\ \rho_2 &= (M_{11}M_{22} + M_{22}M_{33} + M_{11}M_{33} - \\ &\quad M_{12}M_{21} - M_{32}M_{23} - M_{31}M_{13}), \\ \rho_3 &= M_{13}M_{22}M_{31} + M_{11}M_{23}M_{32} + \\ &\quad M_{12}M_{21}M_{33} - M_{12}M_{22}M_{33} - \\ &\quad M_{12}M_{23}M_{31} - M_{13}M_{21}M_{32}.\end{aligned}$$

Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz, titik keseimbangan $P_6(x_6^*, y_6^*, z_6^*)$ stabil asimptotik lokal jika $\rho_1 < 0$, $\rho_2 < 0$, $\rho_3 < 0$, dan $\rho_1\rho_2 - \rho_3 < 0$. Syarat tersebut memenuhi Teorema 4.

2. Analisis kestabilan model dengan pemanenan
Dari model Eq.2. diperoleh matriks Jacobian

$$J(H) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $J_{11} = r - 2\frac{r}{K}x - a_1y - \omega_1z - \delta_1$,
 $J_{12} = -a_1x$, $J_{13} = -\omega_1x$, $J_{21} = -a_2y$,
 $J_{22} = s - 2\frac{s}{L}y - a_2x - \omega_2z - \delta_2$, $J_{23} =$
 $-\omega_2y$, $J_{31} = \beta z$, $J_{32} = \mu z$, dan $J_{33} = \beta x +$
 $\mu y - c - \delta_3$.

Teorema 5. Titik

keseimbangan $H_3(x_3^*, y_3^*, 0)$ stabil asimptotik lokal jika memenuhi syarat

$$\begin{aligned} & \beta x_3^* + \mu y_3^* < c + \delta_3, x_3^* \left(\frac{2r}{K} + a_2 \right) + y_3^* \left(\frac{2s}{L} + a_1 \right) + \\ & \delta_1 + \delta_2 > r + s, \text{ dan } rs + 4\frac{rs}{KL}x_3^*y_3^* + \\ & x_3^* \left(2\frac{r}{K}\delta_2 + a_2\delta_1 + 2\frac{r}{K}a_2x_3^* \right) + y_3^* \left(2\frac{s}{L}\delta_1 + \right. \\ & \left. a_1\delta_2 + 2\frac{s}{L}a_1y_3^* \right) + \delta_1\delta_2 > y_3^* \left(2\frac{rs}{L} + sa_1 \right) + \\ & x_3^* \left(2\frac{rs}{K} + ra_2 \right) + s\delta_1 + r\delta_2. \end{aligned}$$

Bukti: Matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan $H_3(x_3^*, y_3^*, 0)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J(H_3) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ 0 & 0 & H_{33} \end{bmatrix}$$

dengan $H_{11} = r - 2\frac{r}{K}x_3^* - a_1y_3^* - \delta_1$, $H_{12} =$
 $-a_1x_3^*$, $H_{13} = -\omega_1x_3^*$, $H_{21} = -a_2y_3^*$, $H_{22} = s -$
 $2\frac{s}{L}y_3^* - a_2x_3^* - \delta_2$, $H_{23} = -\omega_2y_3^*$, dan $H_{33} =$
 $\beta x_3^* + \mu y_3^* - c - \delta_3$.

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[J(H_3) - \lambda I] = 0, \text{ yaitu} \\ (H_{33} - \lambda)[\lambda^2 - (H_{11} + H_{22})\lambda + H_{11}H_{22} - \\ & H_{12}H_{21}] = 0, \text{ atau} \\ (H_{33} - \lambda)[\lambda^2 + \rho_1\lambda + \rho_2] &= 0, \text{ di mana} \\ \rho_1 &= -(H_{11} + H_{22}) = x_3^* \left(\frac{2r}{K} + a_2 \right) + y_3^* \left(\frac{2s}{L} + a_1 \right) + \\ & \delta_1 + \delta_2 - r - s, \text{ dan} \\ \rho_2 &= H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= rs - y_3^* \left(2\frac{rs}{L} + sa_1 \right) \\ &- r\delta_2 - x_3^* \left(2\frac{rs}{K} + ra_2 \right) \\ &+ 4\frac{rs}{KL}x_3^*y_3^* + x_3^* \left(2\frac{r}{K}\delta_2 \right. \\ &+ \left. a_2\delta_1 + 2\frac{r}{K}a_2x_3^* \right) \\ &+ y_3^* \left(2\frac{s}{L}\delta_1 + a_1\delta_2 \right. \\ &+ \left. 2\frac{s}{L}a_1y_3^* \right) - s\delta_1 + \delta_1\delta_2 \end{aligned}$$

Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz, titik keseimbangan $H_3(x_3^*, y_3^*, 0)$ stabil asimptotik lokal jika $H_{33} < 0$, $\rho_1 > 0$, dan $\rho_2 > 0$. Syarat tersebut memenuhi Teorema 5.

Teorema 6. Titik keseimbangan $H_4(0, y_{41}^*, z_{41}^*)$ stabil asimptotik lokal jika memenuhi syarat

$$\begin{aligned} r &< a_1y_4^* + \omega_1z_4^* + \delta_1, 2\frac{s}{L}y_4^* + \omega_2z_4^* + \delta_2 + c + \\ \delta_3 &> s + \mu y_4^*, \text{ dan } y_4^* \left(s\mu + 2\frac{cs}{L} + 2\frac{s\delta_3}{L} \right) + \\ & z_4^* (c\omega_2 + \omega_2\delta_3) + \delta_2(c + \delta_3) > cs + \\ & y_4^* \left(2\frac{s\mu}{L}y_4^* + \mu\delta_2 \right) + s\delta_3. \end{aligned}$$

Bukti: Matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan $H_4(0, y_{41}^*, z_{41}^*)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J(H_4) = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $H_{11} = r - a_1y_4^* - \omega_1z_4^* - \delta_1$, $H_{21} =$
 $-a_2y_4^*$, $H_{22} = s - 2\frac{s}{L}y_4^* - \omega_2z_4^* - \delta_2$, $H_{23} =$
 $-\omega_2y_4^*$, $H_{31} = \beta z_4^*$, $H_{32} = \mu z_4^*$, dan
 $H_{33} = \mu y_4^* - c - \delta_3$.

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[J(H_4) - \lambda I] = 0, \text{ yaitu} \\ (H_{11} - \lambda)[\lambda^2 - (H_{22} + H_{33})\lambda + H_{22}H_{33} - \\ & H_{23}H_{32}] = 0, \text{ atau} \\ (H_{33} - \lambda)[\lambda^2 + \rho_1\lambda + \rho_2] &= 0, \end{aligned}$$

dengan

$$\rho_1 = -(H_{22} + H_{33}) = 2\frac{s}{L}y_4^* + \omega_2z_4^* + \delta_2 +$$

$$c + \delta_3 - s - \mu y_4^*,$$

$$\rho_2 = H_{22}H_{33} - H_{23}H_{32} = s\mu y_4^* + 2\frac{cs}{L}y_4^* +$$

$$2\frac{s\delta_3}{L}y_4^* + c\omega_2z_4^* + \omega_2\delta_3z_4^* + c\delta_2 + \delta_2\delta_3 -$$

$$cs - 2\frac{s\delta_2\omega_2}{L}y_4^{*2} - s\delta_3 - \mu\delta_2y_4^*.$$

Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz, titik keseimbangan $H_4(0, y_{41}^*, z_{41}^*)$ stabil asimptotik lokal jika $H_{11} < 0$, $\rho_1 > 0$, dan $\rho_2 > 0$. Syarat tersebut memenuhi Teorema 6.

Teorema 7. Titik keseimbangan $H_5(x_{51}^*, 0, z_{51}^*)$ stabil asimptotik lokal jika memenuhi syarat

$$\begin{aligned} s &< a_2x_5^* + \omega_2z_5^* + \delta_2, \quad 2\frac{r}{K}x_5^* + \omega_1z_5^* + \delta_1 + \\ \delta_3 + c &> r + \beta x_5^*x_{51}^* \left(r\beta + 2\frac{cr}{K} + 2\frac{r}{K}\delta_3 \right) + \\ & z_5^* (c\omega_1 + \omega_1\delta_3) + \delta_1(c + \delta_3) > cr + r\delta_3 + \\ & x_5^* \left(2\frac{r\beta}{K}x_5^* + \beta\delta_1 \right). \end{aligned}$$

Bukti: Matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan $H_5(x_{51}^*, 0, z_{51}^*)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J(H_5) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ 0 & H_{22} & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $H_{11} = r - 2\frac{r}{K}x_5^* - \omega_1z_5^* - \delta_1$, $H_{12} =$
 $-a_1x_5^*$, $H_{13} = -\omega_1x_5^*$, $H_{22} = s - a_2x_5^* -$
 $\omega_2z_5^* - \delta_2$, $H_{31} = \beta z_5^*$, $H_{32} = \mu z_5^*$, dan $H_{33} =$
 $\beta x_5^* - c - \delta_3$.

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[J(H_5) - \lambda I] = 0, \text{ yaitu} \\ (H_{22} - \lambda)[\lambda^2 - (H_{11} + H_{33})\lambda + H_{11}H_{33} - \\ & H_{13}H_{31}] = 0, \text{ atau} \end{aligned}$$

$$(H_{22} - \lambda)[\lambda^2 + \rho_1\lambda + \rho_2] = 0, \text{ di mana}$$

$$\rho_1 = -(H_{11} + H_{33}) = 2\frac{r}{K}x_5^* + \omega_1z_5^* + \delta_1 +$$

$$\delta_3 + c - r - \beta x_5^* \text{ dan}$$

$$\rho_2 = H_{11}H_{33} - H_{13}H_{31} = r\beta x_5^* + 2\frac{cr}{K}x_5^* +$$

$$2\frac{r}{K}\delta_3x_5^* + c\omega_1z_5^* + \omega_1\delta_3z_5^* + c\delta_1 +$$

$$\delta_1\delta_3 - cr - r\delta_3 - 2\frac{r\beta}{K}x_5^{*2} - \beta\delta_1x_5^*.$$

Menurut uji kestabilan Routh-Hurwitz, titik keseimbangan $H_5(x_{51}^*, 0, z_{51}^*)$ stabil asimptotik lokal jika $H_{22} < 0$, $\rho_1 > 0$, dan $\rho_2 > 0$. Syarat tersebut memenuhi Teorema 7.

Teorema

8. Titik

keseimbangan $H_6(x_{61}^*, y_{61}^*, z_{61}^*)$ stabil asimptotik lokal jika memenuhi syarat $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$, dan $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 > 0$ dimana $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ adalah koefisien dari persamaan karakteristik yang terbentuk dari matriks Jacobian yang bersesuaian dengan titik $H_6(x_{61}^*, y_{61}^*, z_{61}^*)$, yaitu $f(\lambda) = \lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3$.

Bukti: Matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan $H_6(x_{61}^*, y_{61}^*, z_{61}^*)$ dapat dinyatakan sebagai

$$J(H_6) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix},$$

dengan $H_{11} = r - 2\frac{r}{K}x_6^* - a_1y_6^* - \omega_1z_6^* - \delta_1$,
 $H_{12} = -a_1x_6^*$, $H_{13} = -\omega_1x_6^*$, $H_{21} = -a_2y_6^*$,
 $H_{22} = s - 2\frac{s}{L}y_6^* - a_2x_6^* - \omega_2z_6^* - \delta_2$, $H_{23} = -\omega_2y_6^*$,
 $H_{31} = \beta z_6^*$, $H_{32} = \mu z_6^*$, dan $H_{33} = \beta x_6^* + \mu y_6^* - c - \delta_3$.

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik $f(\lambda) = \det(J(H_6) - \lambda I) = 0$, yaitu
 $\lambda^3 - (H_{11} + H_{22} + H_{33})\lambda^2 + (H_{11}H_{22} + H_{22}H_{33} + H_{11}H_{33} - H_{12}H_{21} - H_{32}H_{21} - H_{31}H_{12} - H_{13}H_{21} - H_{11}H_{23} - H_{32}H_{23} - H_{31}H_{13})\lambda + H_{11}H_{23}H_{32} - H_{12}H_{23}H_{31} - H_{13}H_{21}H_{32} = 0$, atau
 $\lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 = 0$, dengan
 $\gamma_1 = -(H_{11} + H_{22} + H_{33})$,
 $\gamma_2 = (H_{11}H_{22} + H_{22}H_{33} + H_{11}H_{33} - H_{12}H_{21} - H_{32}H_{21} - H_{31}H_{12})$, dan
 $\gamma_3 = H_{11}H_{23}H_{32} - H_{12}H_{23}H_{31} - H_{13}H_{21}H_{32}$.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan karakteristik mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$, dan $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 > 0$. Syarat tersebut memenuhi Teorema 8. Dengan demikian titik keseimbangan H_6 stabil asimptotik lokal.

D. Usaha Pemanenan pada Populasi

Dengan asumsi bahwa populasi sebagai stok memberikan manfaat, maka populasi dieksploitasi. Dalam usaha eksploitasi tersebut diperlukan biaya dan hasil eksploitasi memberikan penerimaan dan keuntungan secara ekonomi. Titik keseimbangan interior yang stabil dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimum.

Fungsi biaya total diberikan sebagai

$$TC = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$$

dan fungsi penerimaan total diberikan sebagai

$$TR = p_1x_{61}^*q_1E_1 + p_2y_{61}^*q_2E_2 + p_3z_{61}^*q_3E_3.$$

Dengan demikian diperoleh fungsi keuntungan $\pi = TR - TC$

$$\pi = p_1x_{61}^*q_1E_1 + p_2y_{61}^*q_2E_2 + p_3z_{61}^*q_3E_3 - c_1E_1 - c_2E_2 - c_3E_3.$$

Untuk memperoleh keuntungan maksimal, diperlukan syarat $\frac{d\pi}{dE_1} = 0$, $\frac{d\pi}{dE_2} = 0$ dan diselesaikan secara simultan untuk mendapat titik kritis $TE_*(E_1^*, E_2^*)$. Diperoleh titik kritis $TE_*(E_1^*, E_2^*)$ dimana

$$E_1^* = \left(\frac{2ka + 2ke - 2kd - 2kh - ji - bi - fi}{b^2 + 2bf + 2bj + f^2 + 2fj + j^2 - 4kc - 4kg} \right)$$

$$E_2^* = \frac{f(d + h - a - e) + j(d + h - a - e) + bd + bh + 2kci + 2kgi - ab - be}{(b^2 + 2bf + 2bj + f^2 + 2fj + j^2 - 4kc - 4kg)}$$

$$dengana = \frac{p_1q_1K(La_1\omega_2 + Ls\omega_1\mu - sc\omega_1 - Lr\mu\omega_2)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2}$$

$$b = \frac{p_1q_1K(La_1\omega_2q_3 - s\omega_1q_3)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2}$$

$$c = \frac{p_1q_1K(L\mu\omega_2q_1 - L\omega_1\mu q_2)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2}$$

$$d = \frac{c_1(KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2},$$

$$e = \frac{p_2q_2L(Kr\beta\omega_2 - cr\omega_2 - Ks\beta\omega_1 + Kca_2\omega_1)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2},$$

$$f = \frac{p_2q_2L(-r\omega_2q_3 + Ka_2\omega_1q_3)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2},$$

$$g = \frac{p_2q_2L(K\beta\omega_1q_2 - K\beta\omega_2q_1)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2},$$

$$h = \frac{c_2(KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2},$$

$$i = \frac{p_3q_3(KLsa_1\beta - Lsr\mu - KLca_2a_1 - Ksr\beta + src + LKra_2\mu)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2},$$

$$j = \frac{p_3q_3(Ks\beta q_1 - KLa_2\mu q_1 - KLa_1\beta q_2 + Lr\mu q_2)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2},$$

$$k = \frac{p_3q_3(sr q_3 - KLa_2a_1q_3)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2}, \text{ dan}$$

$$l = \frac{c_3(KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2)}{KLa_1\beta\omega_2 + KLa_2\omega_1\mu - Ks\beta\omega_1 - Lr\mu\omega_2}.$$

Dengan nilai titik kritis usaha pemanenan tersebut, selanjutnya diperoleh titik keseimbangan dan dianalisis kestabilannya.

E. Simulasi Numerik

1. Simulasi untuk Model tanpa Pemanenan

Untuk melakukan simulasi diberikan nilai parameter $K = 3000$, $L = 3000$, $w_1 = 0.03$, $w_2 = 0.03$, $b_1 = 0.008$, $b_2 = 0.009$, $r = 2.09$, $s = 2.07$, $c = 0.09$, $a_1 = 0.00065$, dan $a_2 = 0.0006$.

Dengan demikian diperoleh titik keseimbangan interior $P = (252.10084, 109.24369, 61.44537)$.

Matriks Jacobian yang bersesuaian dengan titik P_6 adalah

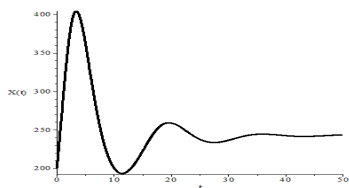
$$J(P) = \begin{bmatrix} -0.17563 & -0.16386 & -7.56302 \\ -0.06554 & -0.07537 & -3.27731 \\ 0.01474 & 0.01659 & -1.10^{11} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik yang dibentuk dari $J(P)$

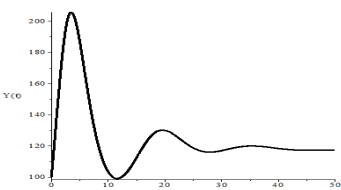
$$\lambda^3 + 0.251008\lambda^2 + 0.16840\lambda + 0.00181,$$

dan diperoleh nilai eigen $-0.12004 + 0.38906i$, $-0.12004 - 0.38906i$, dan -0.01093 . Dengan itu titik keseimbangan P_6 stabil asimptotik lokal.

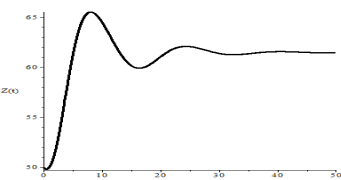
Dengan menggunakan nilai awal $x(0) = 200$, $y(0) = 100$, $z(0) = 50$, maka diperoleh kurva solusi dari Eq. 2 adalah sebagai berikut.



Gambar 1. Plot trayektori populasi mangsa pertama tanpa pemanenan



Gambar 2. Plot trayektori populasi mangsa kedua tanpa pemanenan



Gambar 3. Plot trayektori populasi pemangsa tanpa pemanenan

Dari Gambar 1, Gambar 2, dan Gambar 3 diketahui bahwa dengan nilai awal populasi awal yang diberikan, maka populasi mangsa pertama, pemangsa kedua, dan pemangsa akan konvergen ke titik keseimbangannya. Hal ini berarti bahwa ketiga populasi akan tetap lestari.

2. Simulasi Model dengan Pemanenan

Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi untuk model Eq.2. adalah $K=3000, L=3000, w_1=0.03, w_2=0.03, b_1=0.008, b_2=0.009, r=2.09, s=2.07, c=0.09, a_1=0.00065, a_2=0.0006, p_1=100, p_2=100, p_3=900, c_1=50, c_2=50, c_3=100, q_1=0.6, q_2=0.1$, dan $q_3=0.5$. Dengan itu diperoleh titik keseimbangan $H_6(x_{61}^*, y_{61}^*, z_{61}^*)$, dengan

$$x_{61}^* = -3781.512E_1 + 560.224E_3 + 252.101,$$

$$y_{61}^* = -109.24 + 3361.344E_1 + 1353.87E_3,$$

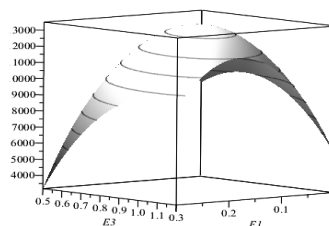
$$z_{61}^* = -5.014E_1 - 42.343E_3 + 61.445.$$

Fungsi keuntungan diberikan oleh

$$\pi = p_1 x_{61}^* E_1 + p_2 y_{61}^* E_1 + p_3 z_{61}^* E_3 - c_1 E_1 - c_2 E_1 - c_3 E_3,$$

$$\pi = -1.932773110 \cdot 10^5 + (44895.89169E_3 + 16118.48740E_1 - 19054.62185E_3^2 + 27550.42017E_3).$$

Sehingga diperoleh titik kritis $E_{1*} = 0.14558$ dan $E_{3*} = 0.89444$ dengan keuntungan maksimal $\pi = 13494.37307$. Plot permukaan fungsi keuntungan diberikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Plot permukaan fungsi keuntungan

Dengan usaha pemanenan yang diberikan terhadap ketiga populasi sebesar $E_{1*} = 0.14558$ dan $E_{3*} = 0.89444$ diperoleh titik keseimbangan interior $H_6 = (202.6697, 1809.5526, 22.8416)$.

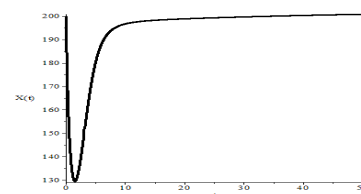
Matriks Jacobian untuk H_6 adalah

$$J(H) \begin{bmatrix} -0.14119 & -0.13173 & -6.08009 \\ -1.08573 & -1.24859 & -54.28658 \\ 0.00548 & 0.00617 & -1 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix}.$$

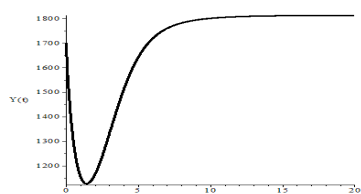
Persamaan karakteristik yang dari $J(H)$ adalah

$f(\lambda) = \lambda^3 + 1.38978\lambda^2 + 0.40139\lambda + 0.00897$, dengan nilai eigen $-0.02437, -0.99571$, dan -0.36969 .

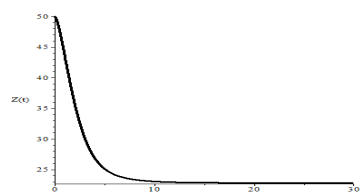
Dengan menggunakan nilai awal $x(0) = 200$, $y(0) = 1700$, dan $z(0) = 50$ maka diperoleh kurva solusi dari Eq. 2. adalah sebagai berikut.



Gambar 5. Plot trayektori populasi mangsa pertama



Gambar 6. Plot trayektori populasi mangsa kedua



Gambar 7. Plot trayektori populasi pemangsa

V. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Model dinamika populasi pada dua mangsa-satu pemangsa dengan fungsi respon Holling I dan usaha pemanenan konstan pada ketiga populasi memiliki tujuh titik keseimbangan yang stabil apabila memenuhi syarat-syarat tertentu. Untuk model tanpa pemanenan, dengan syarat tertentu titik keseimbangan interior stabil asimptotik lokal. Hal ini bermakna bahwa ketiga populasi dapat hidup bersama secara berkelanjutan.

Untuk model dengan usaha pemanenan konstan, populasi mangsa pertama dan kedua dieksploitasi dengan usaha pemanenan yang sama dan populasi pemangsa juga dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan, tetapi usaha pemanenan yang digunakan berbeda dengan usaha pemanenan yang dikenakan pada populasi pemangsa. Titik keseimbangan interior dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimal.

Dari hasil analisis untuk model dengan pemanenan diperoleh suatu nilai kritis usaha pemanenan yang membuat titik keseimbangan interior tetap stabil dan juga memberikan keuntungan maksimum yang berkelanjutan. Hal ini bermakna bahwa ketiga populasi mangsa dan pemangsa dapat dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan yang memberikan keuntungan maksimal dan ketiga populasi tidak akan punah.

B. Saran

Dalam mengkaji dinamika populasi mangsa pemangsa dengan pemanenan, beberapa jenis fungsi pemanenan dapat dipertimbangkan dalam model. Misalnya fungsi pemanenan dengan laju bergantung pada waktu pemanenan atau pemanenan kuota konstan. Demikian fungsi respon predasi dapat dipertimbangkan fungsi respon Holling tipe II, Holling Tipe III, maupun Holling tipe IV.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat, Direktorat Jenderal Penguatan Riset dan Pengembangan, Kemenristekdikti atas bantuan hibah Kompetisi Penelitian Tim Pascasarjana melalui LP2M UNHAS dengan nomor kontrak: 2569/UN4.21/LK.23/2017.

DAFTAR PUSTAKA

- Argawal, M. dan Pathak, R., 2012, "Persistence and Optimal Harvesting of Prey-Predator Model with Holling Type III Functional Response", International Journal of Engineering, Science and Technology, Vol. 4, No. 3, p. 78-96.
- Daga, N., Singh, B., Jain, S., dan Ujjainkar, G., 2014a, "Analysis of a Prey-Predator System with Modified Transmission Function", American Journal of Engineering Research (AJER) e-ISSN: 2320-0847 p-ISSN : 2320-0936 Vol. 3, Issue-9, p. 194-202.
- Daga, N., Singh, B., Jain, S., dan Ujjainkar, G., 2014b, "Prey Predator Model with Persistence of Stability", International Journal of Latest Research in Science and Technology, Vol. 3, Issue 4, p. 171-175.
- Gakhar, S. dan Naji, R.K., 2002, "Existence of Chaos in Two Prey-One-Predator System", Chaos, Solitons and Fractals 17, p. 639-649.
- Hnts, K.H. dan Magesha, Z.T., 2016, "Mathematical Modelling of Three Species Food Web with Lotka Volterra Interaction and Intraspecific Competition", Mathematical Theory and Modeling ISSN: 2225-0522 Vol.6, No.11, p. 2224-5804.
- Kar, T.K. dan Batabyal, A., 2010, "Persistence and Stability of a Two Prey One Predator System", International Journal of Engineering, Science and Technology, Vol. 2, No. 2, p. 174-190.
- Kar, T.K. dan Chaudhuri, K.S., 2002, "Harvesting in a Two Prey One Predator Fishery", a Bioeconomic Model, ANZIAMJ, p. 443-456.
- Rao, V.L.G.M. dan Rasappan, S., 2015, "Dynamic and Complexities of a Two Prey-One Predator System Involving Competition with Nonlinear Feed Back Control", International Journal of Pharm Tech Research, ISSN: 0974-4304 Vol.8, No.9, p. 180-197.
- Srilatha, R. dan Ravindra, B.R., 2014, "Stability Analysis of Three Species Model in Series Mutualism with Bionomic and Optimal Harvesting of Two Terminal Species", International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) Vol. 2, Issue 12, p. 1043-1052.
- Toaha, S., Kusuma, J., Khaeruddin dan Bahri, M., 2014, "Stability Analysis and Optimal Harvesting Policy of Prey-Predator Model with Stage Structure for Predator", J. Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, No. 159, p. 7923-7934.
- Yeni, A., Gunawan, G., dan Sukarsih, I., 2016, "Simulasi Kestabilan Model Predator-Prey Tipe Holling II dengan Faktor Pemanenan", Prosiding Matematika, ISSN: 2460-6464, p. 31 - 36.